

Завдання 7*

Знайдемо другий член x_2 . Він дорівнює середньому геометричному членів x_1 та x_3 :

$$x_2 = \sqrt{x_1 \cdot x_3} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$$

Знайдемо знаменник прогресії q :

$$q = \frac{x_2}{x_1} = \frac{6}{2} = 3$$

Сума обчислюється за формулою:

$$S_n = \frac{x_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Підставимо відомі значення:

$$S_n = \frac{2(3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{2(3^n - 1)}{2} = 3^n - 1$$

$$3^n - 1 = 242$$

$$3^n = 243$$

$$3^n = 3^5$$

$$n = 5$$

Завдання 8*

$$\begin{cases} b_2 - b_1 = -\frac{3}{4} \\ b_4 - b_2 = \frac{3}{16} \end{cases}$$

Складемо перше рівняння з другим:

$$b_2 - b_1 + b_4 - b_2 = -\frac{3}{4} + \frac{3}{16}$$

$$b_4 - b_1 = -\frac{9}{16}$$

Підставимо його в нашу систему замість першого рівняння:

$$\begin{cases} b_4 - b_1 = -\frac{9}{16} \\ b_4 - b_2 = \frac{3}{16} \end{cases}$$

Розкладемо члени прогресії b_n за формулою $b_n = b_1 q^{n-1}$, де q — знаменник прогресії:

$$\begin{cases} b_1 q^3 - b_1 = -\frac{9}{16} \\ b_1 q^3 - b_1 q = \frac{3}{16} \end{cases}$$

Винесемо b_1 за дужки:

$$\begin{cases} b_1(q^3 - 1) = -\frac{9}{16} \\ b_1(q^3 - q) = \frac{3}{16} \end{cases}$$

Розділимо перше рівняння на друге (ми можемо це зробити, тому що $b_1 \neq 0$: якби було $b_1 = 0$, то геометрична прогресія була б стаціонарною з членами 0, 0, 0):

$$\frac{q^3 - 1}{q^3 - q} = -3$$

Розкладемо знаменник і числівник на множники (за формулами різниці квадратів і кубів):

$$\frac{(q-1)(q^2+q+1)}{q(q-1)(q+1)} = -3$$

Скоротимо дріб на $(q-1)$ (очевидно, що $q \neq 1$ — це можна побачити з 4-ї системи):

$$\frac{q^2 + q + 1}{q(q+1)} = -3$$

Розв'яжемо це рівняння:

$$q^2 + q + 1 = -3(q^2 + q)$$

$$q^2 + q + 1 = -3q^2 - 3q$$

$$4q^2 + 4q + 1 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 4 = 0$$

$$q = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Далі знайдемо b_1 , наприклад, з рівняння $b_1(q^3 - 1) = -\frac{9}{16}$:

$$b_1 \cdot \left(-\frac{1}{8} - 1\right) = -\frac{9}{16}$$

$$-\frac{9}{8}b_1 = -\frac{9}{16}$$

$$\frac{1}{8}b_1 = \frac{1}{16}$$

$$b_1 = \frac{1}{2}$$

Тепер неважко знайти інші члени (пам'ятаймо, що $q = -1/2$):

$$b_2 = b_1q = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$b_3 = -\frac{1}{8}; \quad b_4 = -\frac{1}{16}$$

Тож ми маємо знакозмінну прогресію з першим членом $1/2$ і знаменником $-1/2$.

Завдання 10*

Розв'язуючи це завдання, ми користуватимемося тим, що член арифметичної прогресії є середнім арифметичним двох сусідніх членів:

$$a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n,$$

Суму трьох послідовних членів арифметичної прогресії можна записати так:

$$\begin{aligned} b_1 + b_1q + b_1q^2 &= 14 \\ b_1(1 + q + q^2) &= 14 \end{aligned} \tag{1}$$

Другу умову запишемо так:

$$\begin{aligned} b_1 + (b_1q^2 + 4) &= 2(b_1q + 3) \\ b_1 + b_1q^2 - 2b_1q &= 6 - 4 \\ b_1(1 + q^2 - 2q) &= 2 \end{aligned} \tag{2}$$

Розділимо рівняння (1) на (2):

$$\frac{1 + q + q^2}{1 + q^2 - 2q} = 7$$

Розв'яжемо це рівняння:

$$\begin{aligned} 1 + q + q^2 &= 7(q^2 - 2q + 1) \\ 1 + q + q^2 &= 7q^2 - 14q + 7 \\ -6q^2 + 15q - 6 &= 0 \\ 6q^2 - 15q + 6 &= 0 \\ 2q^2 - 5q + 2 &= 0 \\ D &= (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 \\ q_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}; \quad q_2 &= \frac{5+3}{4} = 2 \end{aligned}$$

Розглянемо перший випадок при $q = \frac{1}{2}$. Знайдемо b_1 з рівняння

$$\begin{aligned} b_1(1 + q + q^2) &= 14 \\ b_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) &= 14 \\ b_1 &= 8 \\ b_2 &= 8 \cdot q = 4 \\ b_3 &= 4 \cdot q = 2 \end{aligned}$$

Отримали прогресію 8, 4, 2.

Тепер розглянемо другий випадок при $q = 2$:

$$b_1(1 + q + q^2) = 14$$

$$b_1(1 + 2 + 4) = 14$$

$$b_1 = 2$$

$$b_2 = 2 \cdot q = 4$$

$$b_3 = 4 \cdot q = 8$$

Отримали прогресію 2, 4, 8.

Відповідь: числа 2, 4, 8 або 8, 4, 2 (їх можна взяти і в такому, і в такому порядку).

P. S. Перевірте правильність розв'язків самі. Це зробити дуже легко.